第６章　仮説検定の基礎

母集団の平均や分散について知られていない場合に、母数の推定という方法を前章で学びました。この６章では、標本から得られた情報は、母数（母集団の平均や分散）を信じるのに、十分であるかどうかを検証します。

例えば、企業は新しい機械を購入する際にその機械の性能について興味をもちます。セールスマン（もしくは、セールスウーマン）をいうことを信じて購入するか、それとも試験期間をもうけて、その新しい機械が製造する製品のサンプル（標本）にして性能を調べる方法も考えられます。購入する機械が高価になればなるほど、後者の方法が好ましいかもしれません。

この例では、どのような仮説が検定されるのでしょうか？調査の対象になるのは、新しく購入する機械の性能です。ただし、その性能について正確な知識を持ちえませんから、ある比較が必要となります。その基準となるのがパラメータ(母数)です。

大切なことですが、仮説の検定とは、母集団のパラメータを検定するのではなく、標本から得た統計値から、標本を生み出している対象が、母数と同じであるかどうか、検定をするのです。母集団についての予測を<u>仮説</u>といいます。

6.1 平均値の検定

統計学は仮説検定において、二つの仮説を立てます。

１．　母数についての仮説を、**帰無仮説(null hypothesis)** として、
　　H_0:
　　とします。
２．　次に、母数が変化したのではないか、それに変わりうるものを、
　　対立仮説(alternative hypothesis)として、
　　H_1:
　　とします。

<u>対立仮説のおき方に二通りの方法があります。</u>

１．　帰無仮説として挙げた値について、対立仮説では、その値と同じではない。つまり、 $\neq$ として設定する方法を、**両側検定**といいます。

（例１）

H_0：　$\mu = 3.1$

H_1：　$\mu \neq 3.1$

例１は、標本から得られた情報によると、「母集団の平均値は、3.1 ではない」と思われる、ということです。[1]

２．対立仮説の他一つの設定の仕方として、不等号で示す方法があります。

（例２）

H_0：　$\mu = 3.1$

H_1：　$\mu > 3.1$

例 2 は、標本から得られた情報によると、母数が変化して、それも値がこれまでのものより大きいと思われる、ということです。

(例 3)

H_0：　$\mu = 3.1$

H_1：　$\mu < 3.1$

例 3 は、母数が変化して、これまでの値よりも小さいと思われる、という情報が標本から得られています。

<u>では、標本の統計値がどのような値になったときに帰無仮説を受理するのでしょうか？また、帰無仮説を棄却して、対立仮説を支持するのでしょうか？</u>

臨界値（境界値 critical value）

標本の値が、この境界値よりも絶対値で大きければ、帰無仮説を棄却する基準となる値です。ですから、もし標本の値が境界値よりも絶対値で小さければ帰無仮説を受理することになります。

[1] この言い回しですと、あたかも母集団の平均値を検定しているように感じますが、そうではありません。<u>標本を生み出す対象</u>が、これまで信じられていた母数とおなじではない、ということです。つまり、標本をうみだしている対象が、従来のとは変化したと思われるような、情報を提供しているのです。

例）ある会社は有能といわれていた販売員を他会社からスカウトしました。そして、雇用を開始し、1 年間の統計をみると月々の販売金額が自社の販売員より 15 万円多いとします。では、この販売員は確かに有能でしょうか？

この質問を答えるには、比較の対象となる基準を必要とします。

もし「平均して 10 万円（境界値）月々多ければ、有能とする」とするという定義があれば、この販売員は境界値よりも販売金額は多いので、有能だと結論に達することができます。

統計学の場合は、比較の基準となる境界値が、統計学的（確率的に）事前に与えられます。例えば、仮説検定をする場合に、どの信頼度（%）で、検定をするのか、事前に決めます。

１００－信頼度（%）＝有意水準（少数では、α で通常しめします）

言い換えれば、有意水準を最初に決めて、仮説の検定をします。

一般的な有意水準

１.「有意水準１%」もしくは、パーセントではなく、$\alpha = 0.01$とも示します。有意水準１%ということは、帰無仮説を棄却する可能性が 1%であることをさします。言い換えれば、99%の信頼度（もしくは信頼係数）で仮説を検定しているのです。

２.「有意水準５%」とは、$\alpha = 0.05$、つまり 95%の信頼度です。

３.「有意水準 10%」とは、$\alpha = 0.10$、つまり 90%の信頼度です。

有意水準と境界値との関係

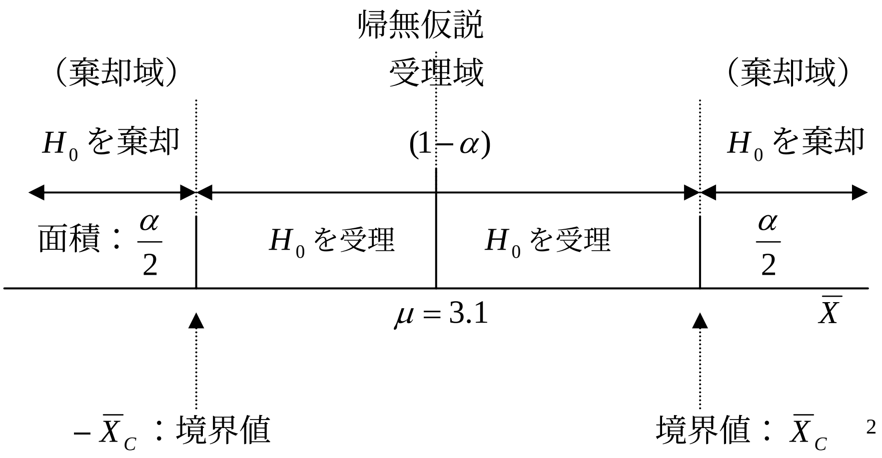
仮説検定の場合に、仮説の方法と有意水準を事前にきめると、境界値を計算できます。

１．両側検定の場合

例えば、母平均を 3.1 として、検定するならば次のようになります。

H_0：　$\mu = 3.1$

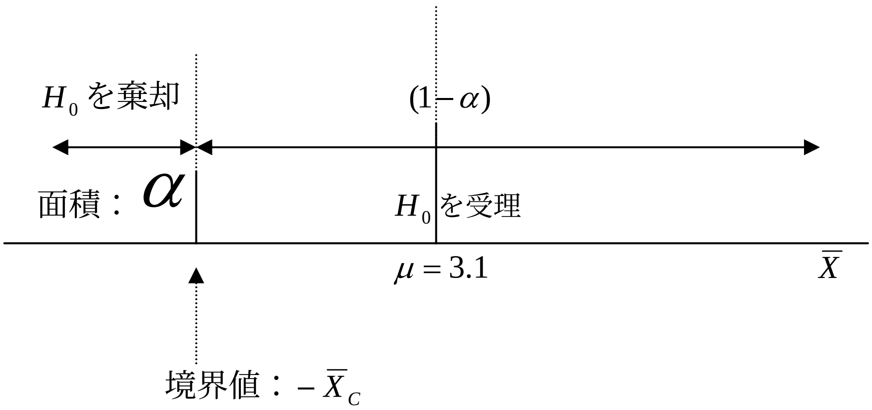
H_1：　$\mu \neq 3.1$



２．片側検定の場合

H_0：　$\mu = 3.1$

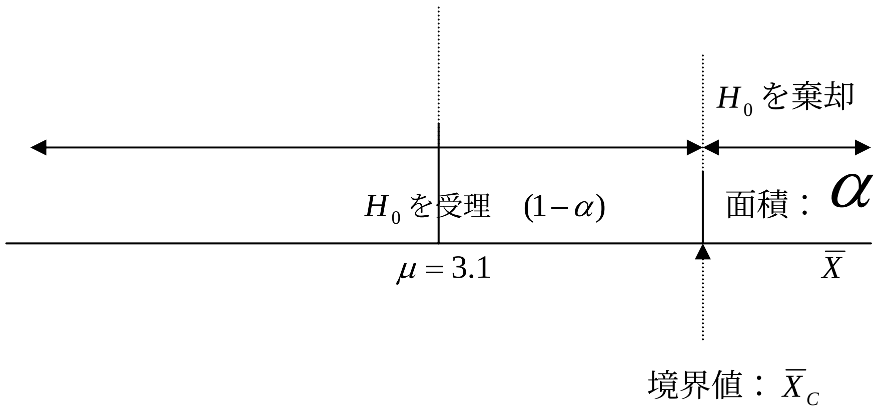
H_1：　$\mu < 3.1$



[2] $\overline{X}_C$ の C は、critical value の意味です。

２．片側検定の場合

H_0：　$\mu = 3.1$
H_1：　$\mu > 3.1$



ここで結論を先取りしますと、

（１）　標本から得られる$\overline{X}_S$が境界値$\overline{X}_C$より内側（母平均側）であれば、帰無仮説を受理する。

（２）　標本$\overline{X}_S$が境界値$\overline{X}_C$より外側であれば、帰無仮説を棄却する。そして、対立仮説を受理する。（この場合、「検定（もしくは、結果）は有意である。」という言葉をつかう。

または、標本の値から、

$$Z_S = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

を求めて、境界値Z_Cと比べる。

注意：もし母集団の標準偏差σが知られていないときには、標本標準偏差sをσの代わりにつかい、自由度＝$n-1$としてt分布表をみます。

境界値に当たる Z_C 求め方（母集団の分散が既知の場合）

１．　有意水準 α を決定する。

２．　標準正規分布表（Z 分布表）をみる。

	α	Z	
値	0.10	1.65	（両側検定）つまり、$\frac{\alpha}{2}$ とする。
		1.28	（片側検定）
値	0.05	1.96	（両側検定）つまり、$\frac{\alpha}{2}$ とする。
		1.65	（片側検定）
値	0.01	2.35	（両側検定）つまり、$\frac{\alpha}{2}$ とする。
		2.33	（片側検定）

例：1999 年度滋賀県では、17 歳の男子の標本($n = 450$)の平均身長は 171.7cm である。1949 年の同県のその値は 161.2cm で、標準偏差は 5.74cm であった。滋賀県では、

（１）今の 17 歳の男子の平均身長は 50 年前とは異なるかどうか、有意水準 1%で検定をしなさい。

（２）今の 17 歳の男子の平均身長は 50 年前とは伸びているかどうか（向上しているかどうか)、有意水準 1%で検定をしなさい。

検定の方法は二通りあります。どちらを使ってもいいです。

最初に、Z_S と Z_C を比較する方法。[3]

（１）について示します。

---

[3] Z_S と Z_C というように、S と C を Z の添え字にしていますが、便宜上使っています。ただし、Z_S の S は、s=sample、Z_C は、c=criticval という意味です。

１.「異なるかどうか」ですから、両側検定です。

H_0：　$\mu = 161.2$
H_1：　$\mu \neq 161.2$

２．　有意水準１％$(\alpha = 0.01)$ですので、Z 分布表から Z_C を求めます

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{0.01}{2} = 0.005$$

教科書をつかえば、0.995（確率面積）の Z は、

$$Z_C = 2.58$$

私がクラスで渡した表では、0.495 をみますと、やはり

$Z_C = 2.58$　です。

３．　こんどは、Z_S を計算します。

$$Z_S = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{171.7 - 161.2}{\frac{5.74}{\sqrt{450}}} = \frac{10.5}{\frac{5.74}{21.21}} = \frac{10.5}{0.27} = 38.89$$

４．結果は、

$$Z_S = 38.89 > Z_C = 2.58$$

棄却域に入る。ゆえに、帰無仮説 H_0 を棄却して、対立仮説 H_1 を受理することになります。

標本から得られる $\overline{X}_S$ が境界値 $\overline{X}_C$ を比較する方法

１．境界値 $\overline{X}_C$ を求める

$$\overline{X}_C = \mu \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z = 161.2 \pm \frac{5.74}{\sqrt{450}} 2.58 = 161.2 \pm 0.2706x2.58 = 161.2 \pm 0.698$$

正の境界値：161.2＋0.698＝161.90
負の境界値：161.2－0.698＝160.50

３．　境界値は 171.7cm ですから、標本の平均値は境界値よりも右側の棄却域に入る。である。

４．　結論：結果は有意である。ゆえに、1999 年の 17 歳の男子の身長は、1949 年のそれよりも異なる。

５．結論：結果は有意である。ゆえに、1999 年度の滋賀県において 17 歳の男子の身長は、1949 年のその値とは異なる。

これまで、境界値と Z の方法で、仮説検定を行いました。実は、他一つの方法があります。

その方法は、$P - value$（P 値）を求めて、有意水準と比較します。そして、P 値が有意水準よりも、小さければ、帰無仮説を棄却して、対立仮説を受理します。また、有意水準よりも大きければ、帰無仮説を受理します。

１．　考え方は、有意水準とは、分布の両側もしくは片側の確率面積です。その確率が帰無仮説を棄却する大きさです。

２．　P 値の求め方は、標本 $\overline{X}_S$ に対応する Z_S を求めます。

３．　Z_S より右側の確率面積ｘ２が、P 値です。つまり、$\overline{X}_S$ よりも外側（＋と－の両側）を足した値が P 値です。[4]

---

[4] これでは、手順がより多くて（Z_S が求められれば、Z_C と比較するだけで仮説の検定はおわりのはずですから）、やっかいですね。しかし、この方法を使うというよりも、知識として覚えておくと非常に便利です。なぜならば、コンピュータを使って解析を行うと、計算ソフト（たとえば、TSP:　Time Series Package）は、$p - value$ を推定値と同時に提供

してくれます。この場合には、Z_S を計算し、Z_C を教科書から見つけて、それぞれを比較しません。ただ、$p-value$ が有意水準より小さければ、仮説検定は有意であると結論に達します。一目瞭然です。なぜなら、コンピュータは $p-value$ を提供しますので、こちらの有意水準は、0.10、0.05、0.01 の 3 つしかないので、どれよりも小さいか比較するだけです。例えば、$p-value=0.078$ であれば、$\alpha=0.05$ より大きいが、$\alpha=0.10$ よりも小さいので、結果は、有意水準 10%で有意ということになります。つまり、90%の信頼度（確信）でもって、結論（帰無仮説を棄却して、対立仮説を受理する）をサポートすることになります。